
Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática



Ciências
ULisboa

ISCTE Business School
Instituto Universitário de Lisboa
Departamento de Finanças

ISCTE  **Business School**
INSTITUTO UNIVERSITÁRIO DE LISBOA

Avaliação de Opções Asiáticas

Mestrado em Matemática Financeira

Rebeca de Jesus Duarte

Dissertação orientada por:
Professor Doutor João Pedro Vidal Nunes

2015

Resumo

O presente trabalho é dedicado à avaliação de opções asiáticas. Uma opção asiática com média aritmética é complexa de avaliar, dado que não é possível definir analiticamente a função distribuição de probabilidade de uma soma de variáveis aleatórias lognormais. Deste modo irão ser calculadas aproximações do preço de uma opção asiática com média aritmética.

No caso de uma opção asiática com média geométrica é possível chegar a uma fórmula fechada, pois sabemos a distribuição do produto de variáveis aleatórias lognormais. Assim, este será o ponto de partida para o cálculo das aproximações.

Esta tese propõe três aproximações, um limite inferior e um limite superior para o preço de uma opção asiática com média aritmética. A primeira aproximação é a fórmula fechada de avaliação de uma opção asiática com média geométrica em tempo contínuo. Para uma maior aderência à realidade, a segunda aproximação é a fórmula fechada de avaliação de uma opção asiática com média geométrica em tempo discreto. Por fim, irá aproximar-se a distribuição da média aritmética em tempo contínuo a uma lognormal, com base nos dois primeiros momentos da média aritmética, e será calculada uma fórmula fechada tendo em conta a distribuição calculada. O limite inferior é calculado através de uma inequação resultante da desigualdade de Jensen, utilizando a *conditioning approach*. O limite superior é obtido somando ao limite inferior um erro, o qual advém da utilização da *conditioning approach*.

As aproximações foram implementadas de forma fácil e simples, e conclui-se que a aproximação que é calculada com base na média aritmética e o limite inferior são as aproximações mais precisas.

Palavras-chave: Opções asiáticas; média geométrica; média aritmética; aproximações; *conditioning approach*.

Abstract

This work is devoted to the valuation of Asian options. An arithmetic average Asian option is not easy to evaluate, since it is not possible to determine the probability distribution of a sum of lognormal random variables. That way, analytic approximations are needed for the arithmetic average asian option price.

For a geometric average Asian option, analytical formulas are available because the probability distribution of the product of lognormal random variables. Therefore this will be the starting point for this dissertation.

This thesis proposes three types of analytic approximations as well as a lower bound and an upper bound for the arithmetic average Asian option price. The first approximation is the closed-form for pricing a geometric average Asian option in continuous time. To get closer to reality, the second approach is the closed-form for pricing a geometric average Asian option in discrete time. Finally, the arithmetic average distribution in continuous time will approach a lognormal, based on the first two moments of the arithmetic average. The lower bound is calculated through an inequality obtained from Jensen's inequality, applying the conditioning approach. The upper bound is acquired by adding an error term to the lower bound, which error arises from the conditioning approach.

The approximations were implemented in a easy and simple way and it is concluded the approximation based on the arithmetic average and the lower bound are the most accurate approximations.

Keywords: Asian options; geometric average; arithmetic average; approximations; conditioning approach.

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Doutor João Pedro Vidal Nunes por toda a disponibilidade e paciência que demonstrou e que sempre me incentivou quando eu mais precisava.

Aos meus pais que me possibilitaram tirar este mestrado, em particular à minha mãe pela grande persistência que teve para eu fazer esta tese e também por todo o apoio possível e imaginário que me deu.

Aos meus amigos e antigos colegas que me deram as suas palavras de incentivo, em especial à Patrícia que se revelou uma amiga e colega incrível e ainda ao meu chefe Pedro por todo interesse e disponibilidade demonstrados.

Ao Ricardo por todas as palavras de apoio e compreensão. Não há palavras suficientes para descrever o quão agradecida estou por fazeres parte da minha vida.

Ao meu avó Chico Pintor, eu sei que ele ia ficar orgulhoso.

Conteúdo

| | |
|--|----|
| Introdução | 2 |
| 1 Fórmula fechada para opções asiáticas com média geométrica em tempo contínuo | 5 |
| 2 Fórmula fechada para opções asiáticas com média geométrica em tempo discreto | 10 |
| 3 Aproximação do preço de uma opção asiática com média aritmética | 15 |
| 4 Aproximação do preço de uma opção asiática com média aritmética através de limites | 21 |
| 5 Resultados Numéricos | 29 |
| Conclusão | 34 |

Introdução

Uma opção é um contrato que dá o direito, mas não a obrigação, de comprar ou vender um determinado ativo subjacente a um dado preço, designado como preço de exercício, até ou numa data futura, designada por maturidade. Geralmente, uma opção de compra é exercida quando o preço do ativo subjacente no mercado é superior ao preço de exercício, pois o detentor da opção querará comprar sempre pelo valor mais baixo. No caso de uma opção de venda, esta será exercida no caso contrário, ou seja, se o preço do ativo subjacente no mercado estiver mais baixo que o preço de exercício, pois o ideal é vender sempre pelo valor mais alto. Uma opção definida desta forma em que apenas pode ser exercida na maturidade chama-se opção europeia e uma opção que pode ser exercida até à maturidade é designada por opção americana. As opções anteriormente referidas estão na categoria de opções *plain vanilla*, pois são consideradas as opções mais simples. Com o passar dos anos estas opções foram evoluindo e ficando cada vez mais complexas, dando origem às opções exóticas. Dentro do conjunto destas opções estão englobados todos os tipos de opções que não são *standard*, como por exemplo as opções com barreira, opções *lookback* ou opções asiáticas.

Esta tese tem como objetivo estudar a avaliação de opções asiáticas. O que difere este tipo de opção de uma opção *plain vanilla* é a forma de cálculo do ganho desta. Numa opção de compra europeia *standard*, por exemplo, recebe-se o máximo entre zero e a diferença entre o preço à vista e o preço de exercício, sendo o preço à vista o preço do ativo subjacente que está em vigor na maturidade da opção. No caso de uma opção de compra asiática recebe-se o máximo entre zero e a diferença entre a média de preços do ativo subjacente e o preço de exercício. A média é calculada durante um certo intervalo de tempo, não sendo obrigatório este intervalo ser o mesmo que a vida da opção, e é calculada com preços observados numa periodicidade definida no contrato.

Existem dois tipos de opções asiáticas: opções asiáticas com média geo-

métrica e opções asiáticas com média aritmética. A diferença está na forma como são calculadas as médias, como o próprio nome indica. Uma opção asiática dá o direito de “comprar” ou “vender” uma média de cotação do ativo subjacente pelo preço de exercício numa maturidade.

Uma opção asiática com média geométrica é fácil de avaliar, uma vez que é possível chegar a uma fórmula fechada para calcular o preço deste tipo de opção, pois a multiplicação de variáveis aleatórias lognormais tem distribuição lognormal. Já no caso das opções asiáticas com média aritmética, é mais complexo avaliar este tipo de opções. A dificuldade advém do facto de não se saber como definir analiticamente a distribuição de uma soma de variáveis aleatórias lognormais.

A recompensa ganha com estas opções é menos volátil do que a recompensa das opções *plain vanilla*, por isso as opções asiáticas têm um preço mais baixo que as opções europeias ou americanas.

Em termos de aplicação prática, as opções asiáticas são muito utilizadas por empresas que frequentemente pagam ou recebem divisa estrangeira. Uma opção em que o ativo subjacente seja uma divisa estrangeira e que se use uma média é uma solução mais barata para reduzir a exposição à divisa. Da forma como está construída, uma opção asiática reduz a influência do preço do ativo subjacente na maturidade da opção, logo é reduzido o efeito de um preço anormal na maturidade desta.

Na avaliação de opções *standard*, Black e Scholes (1973) foram os pioneiros e consideram que o preço do ativo subjacente segue um movimento Browniano geométrico.

O artigo de Kemna e Vorst (1990) retrata que o preço de uma opção asiática é sempre menor ou igual ao preço de uma opção europeia. Também demonstram que é possível utilizar a simulação de Monte Carlo para obter o preço de uma opção asiática e encontram uma fórmula fechada para o preço da opção asiática com média geométrica, a qual é o limite inferior utilizado como variável de controlo numa técnica de redução da variância onde é aplicada também a simulação de Monte Carlo.

Turnbull e Wakeman (1991) descrevem uma forma rápida de obter o preço de uma opção asiática. De maneira a contornar a dificuldade de encontrar a função distribuição de probabilidade da média aritmética, os autores aproximam esta média com séries de Edgeworth. Este artigo descreve um modelo para quando o período de cálculo da média é inferior à maturidade e outro para quando este período é igual ou ultrapassa a data de maturidade da opção. A precisão destes dois modelos é comparada com a aproximação feita pelo método de Monte Carlo. É demonstrado que o preço de uma opção em que o período de cálculo da média é inferior à maturidade pode ser igual ou maior que o preço de uma opção europeia, ao contrário do que foi afirmado

por Kemna e Vorst (1990). Os autores também comparam o preço de uma opção asiática com média aritmética e o preço de uma opção com média geométrica, para a qual chegam a uma fórmula fechada, em que constata-se que para alguns casos estes dois preços estão muito próximos, mas que noutros casos as diferenças já são avultadas.

Três anos depois, Curran (1994) apresenta uma abordagem alternativa ao que tem sido apresentado até então, descrevendo um método para calcular o preço da opção que se baseia em condicionar o valor esperado da recompensa (*payoff*) da opção com a média geométrica dos preços do ativo subjacente e integra com a função distribuição de probabilidade da média geométrica, a qual é conhecida.

Rogers e Shi (1995) apresentam um limite inferior e um limite superior calculando o valor esperado com base numa variável aleatória com distribuição Normal padrão. Os autores afirmam que o limite inferior é muito preciso podendo mesmo ser o preço exato da opção asiática.

Nielsen e Sandmann (2003) propõem novos limites superiores para o preço de uma opção asiática com média aritmética. Além destes novos limites, também propuseram outros que se baseiam nos limites calculados por Rogers e Shi (1995). Como os limites apresentados por estes últimos não dependem do preço de exercício, Nielsen e Sandmann (2003) apresentam limites que dependem do preço de exercício. O limite inferior é proposto como sendo a média aritmética do preço de opções europeias com *delayed payment* e o limite superior é a soma do limite inferior com um erro, que representa o erro que é cometido por ser usada a *conditioning approach* no cálculo do limite inferior.

Esta tese pretende descrever algumas abordagens ao cálculo do preço de opções asiáticas, com o objetivo de se aproximar o mais possível ao preço de uma opção asiática com média aritmética em tempo discreto.

No primeiro capítulo está descrito como chegar à fórmula fechada de uma opção asiática com média geométrica em tempo contínuo. No segundo capítulo, decide-se aproximar mais à realidade de cálculo de uma média e toma-se o tempo da opção asiática com média geométrica como discreto. As fórmulas fechadas obtidas nestes dois primeiros capítulos serão usadas também como aproximações para o preço de uma opção asiática com média aritmética. No terceiro capítulo, é feita uma aproximação ao preço de uma opção asiática com média geométrica com base na aproximação dada por Hull (2006). Finalmente, no último capítulo descreve-se um limite inferior e um limite superior para uma opção asiática com média aritmética ambos dados por Nielsen e Sandman (2003).

Capítulo 1

Fórmula fechada para opções asiáticas com média geométrica em tempo contínuo

Neste capítulo pretende-se chegar, no modelo de Black e Scholes (1973), à fórmula de avaliação de uma opção asiática, considerando-se a média geométrica em tempo contínuo. Para este capítulo utiliza-se como base Zhang (1998).

Esta opção é mais simples de ser avaliada, pois existe uma solução fechada para a mesma. Na maturidade da opção, o proprietário terá o direito ao máximo entre 0 e a diferença entre a média geométrica $G(T)$ e o preço de exercício K , isto é, o valor da opção de compra no momento T é

$$C_T = \max(G(T) - K, 0) \quad (1.1)$$

e o valor da opção de venda é:

$$P_T = \max(K - G(T), 0) \quad (1.2)$$

Proposição 1.1. *A média geométrica do preço de um ativo subjacente S durante o período de t a T , $G(T)$, é definida como:*

$$G(T) = S_t \exp \left(\left[r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right] \frac{\tau}{2} + \frac{\sigma}{\tau} z \right), \quad (1.3)$$

onde S_t é o preço do ativo subjacente no momento t , r é a taxa de juro sem risco, q é a "dividend yield", σ é a volatilidade anualizada do preço do ativo subjacente, $\tau = T - t$ e $z = \int_t^T W_u du$, tal que W_t é um movimento Browniano padrão.

Demonstração. Tem-se que a média geométrica é definida como

$$G(T) = \exp \left[\frac{1}{\tau} \int_t^T \ln(S_u) du \right] \quad (1.4)$$

Pelo modelo de Black e Scholes (1973), o preço do ativo subjacente assume um movimento Browniano geométrico

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t. \quad (1.5)$$

Assim, e aplicando o lema de Itô a $\ln(S_t)$ tem-se que

$$S_T = S_t \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma \int_t^T dW_u \right] \quad (1.6)$$

Substituindo a equação (1.6) na equação (1.4), obtém-se a equação (1.3). \square

Nesta fase, o objetivo é chegar ao preço, no momento t , da opção asiática com média geométrica em tempo contínuo.

Proposição 1.2. *No modelo de Black e Scholes (1973), o valor no momento t de uma opção de compra sobre a média geométrica $G(T)$, com preço de exercício K e vencimento no momento $T(\geq t)$, é dado por*

$$C_t = S_t \exp \left[-\frac{r\tau}{2} - \frac{q\tau}{2} - \frac{\sigma^2\tau}{12} \right] \Phi \left[d^G + \sigma \sqrt{\frac{\tau}{3}} \right] - e^{-r\tau} K \Phi \left[d^G \right], \quad (1.7)$$

onde

$$d^G := \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2}}{\sigma \sqrt{\frac{\tau}{3}}} \quad (1.8)$$

e $\Phi(\cdot)$ é a função cumulativa de probabilidade da distribuição Normal padrão.

Demonstração. O preço de uma opção de compra asiática com média geométrica pode ser expresso como

$$C_t = e^{-r\tau} \mathbb{E} \left[(G(T) - K)^+ | \mathcal{F}_t \right], \quad (1.9)$$

onde \mathbb{E} é o valor esperado condicional sobre a medida de probabilidade neutra face ao risco \mathbb{Q} e \mathcal{F}_t uma filtração.

Inicialmente irá calcular-se o valor esperado e a variância de z . Usando a definição de z , fica-se com

$$\mathbb{E}(z) = \mathbb{E} \left[\int_0^t W_u du \right].$$

Sabendo que

$$d(tW_t) = W_t dt + t dW_t, \quad (1.10)$$

chega-se a

$$\mathbb{E}(z) = \mathbb{E} \left[tW_t - \int_0^t u dW_u \right].$$

Como o valor esperado de uma combinação linear é a combinação linear dos valores esperados, então

$$\mathbb{E}(z) = t \mathbb{E}[W_t] - \mathbb{E} \left[\int_0^t u dW_u \right]. \quad (1.11)$$

Uma vez que W_t é um movimento Browniano, então $\mathbb{E}[W_t] = 0$. Tem-se que u é uma função elementar, portanto, $\mathbb{E} \left[\int_0^t u dW_u \right] = 0$. Deste modo conclui-se que

$$\mathbb{E}[z] = 0. \quad (1.12)$$

De seguida calcula-se a variância de z . Como já foi visto $\mathbb{E}[z] = 0$ e pela definição de z e da variância

$$\text{var}(z) = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t W_u du \right)^2 \right].$$

Pela equação (1.10) tem-se

$$\text{var}(z) = \mathbb{E} \left[\left(tW_t - \int_0^t u dW_u \right)^2 \right].$$

Desenvolvendo o quadrado da diferença e aplicando a propriedade dos valores esperados, chega-se a

$$\text{var}(z) = t^2 \mathbb{E}[W_t^2] - 2t \mathbb{E} \left[W_t \int_0^t u dW_u \right] + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t u dW_u \right)^2 \right]. \quad (1.13)$$

Sabendo que $\mathbb{E}[W_t^2] = t$ por W_t se tratar de um movimento Browniano, escrevendo W_t sob a forma de integral no segundo valor esperado da equação (1.13) e utilizando a Isometria de Itô no último termo, tem-se

$$\text{var}(z) = t^2 t - 2t \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t dW_u \right) \left(\int_0^t u dW_u \right) \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t u^2 du \right]. \quad (1.14)$$

Aplicando a equação (51.3) de Arnold (1992) ao segundo termo da equação (1.14),

$$\begin{aligned}
var(z) &= t^3 - 2t \int_0^t \mathbb{E}(1 \times u) du + \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^t \\
&= t^3 - 2t \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^t + \frac{t^3}{3} \\
&= \frac{t^3}{3}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Em suma, tem-se que $\mathbb{E}(z) = 0$ e $var(z) = \frac{t^3}{3}$.

Deste modo, prossegue-se para a demonstração de C_t . O ponto de partida é a equação (1.9). Utiliza-se a função indicatriz para retirar a função máximo

$$C_t = e^{-r\tau} \mathbb{E}[(G(T) - K) \mathbb{I}_{\{G(T) \geq K\}} | \mathcal{F}_t]. \tag{1.16}$$

É necessário que $G(T) \geq K$, logo utilizando a equação (1.3) e resolvendo a inequação em ordem à variável z , obtêm-se $z \geq z^*$, sendo

$$z^* := \left[\ln \left(\frac{K}{S_t} \right) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2} \right] \frac{\tau}{\sigma}. \tag{1.17}$$

Desta forma a equação (1.16) pode ser escrita como

$$C_t = e^{-r\tau} \mathbb{E}[(G(T) - K) \mathbb{I}_{\{z \geq z^*\}} | \mathcal{F}_t]. \tag{1.18}$$

O valor esperado de uma variável aleatória contínua calcula-se com o auxílio do integral da função densidade de probabilidade $f(z)$. Como z tem distribuição Normal com valor médio 0 e variância $\frac{\tau^3}{3}$, sabe-se que $f(z) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\tau^3}{3}}} \exp \left(-\frac{z^2}{2 \frac{\tau^3}{3}} \right). \text{ Consequentemente,}$$

$$C_t = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} (G(T) - K) \mathbb{I}_{\{z \geq z^*\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\tau^3}{3}}} \exp \left(-\frac{z^2}{2 \frac{\tau^3}{3}} \right) dz.$$

A função indicatriz é sempre zero quando $z \leq z^*$, logo o integral de $-\infty$ a z^* é 0. Assim sendo, apenas o integral de z^* a $+\infty$ é diferente de 0. Usando a definição de $G(T)$ e sabendo que o integral da soma é a soma dos integrais,

tem-se

$$\begin{aligned}
C_t &= e^{-r\tau} \int_{z^*}^{+\infty} S_t \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2} + \frac{\sigma}{\tau} z \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\tau^3}{3}}} \exp \left(-\frac{z^2}{2\frac{\tau^3}{3}} \right) dz \\
&\quad - e^{-r\tau} K \int_{z^*}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\tau^3}{3}}} \exp \left(-\frac{z^2}{2\frac{\tau^3}{3}} \right) dz.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Com alguns cálculos aritméticos tem-se que

$$\exp \left[\frac{\sigma}{\tau} z - \frac{z^2}{2\frac{\tau^3}{3}} \right] = \exp \left[-\frac{\left(z - \frac{\sigma\tau^2}{3} \right)^2}{2\frac{\tau^3}{3}} \right] \exp \left[\frac{\sigma^2\tau}{6} \right]. \tag{1.20}$$

Utilizando as equações (1.17) e (1.20) e colocando as constantes para fora dos integrais, a equação (1.19) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
C_t &= e^{-r\tau} S_t \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2} + \frac{\sigma^2\tau}{6} \right] \int_{z^*}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\tau^3}{3}}} \exp \left[-\frac{\left(z - \frac{\sigma\tau^2}{3} \right)^2}{2\frac{\tau^3}{3}} \right] \\
&\quad - e^{-r\tau} K \Phi \left[-\frac{\left[\ln \left(\frac{K}{S_t} \right) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2} \right] \frac{\tau}{\sigma} - 0}{\sqrt{\frac{\tau^3}{3}}} \right] \\
&= S_t \exp \left[-r\tau + \frac{r\tau}{2} - \frac{q\tau}{2} - \frac{\sigma^2\tau}{4} + \frac{\sigma^2\tau}{6} \right] \\
&\quad \times \Phi \left[-\frac{\left[\ln \left(\frac{K}{S_t} \right) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2} \right] \frac{\tau}{\sigma} - \frac{\sigma\tau^2}{3}}{\sqrt{\tau^3 3}} \right] \\
&\quad - e^{-r\tau} K \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2}}{\sigma \sqrt{\frac{\tau}{3}}} \right]
\end{aligned}$$

Utilizando a definição de d^G dada pela equação (1.8), obtém-se a fórmula fechada (1.7) para a opção de compra asiática com média geométrica em tempo contínuo. \square

Capítulo 2

Fórmula fechada para opções asiáticas com média geométrica em tempo discreto

Nesta secção tem-se como objetivo chegar, no modelo de Black e Scholes (1973), à fórmula de avaliação de uma opção asiática, considerando-se a média geométrica em tempo discreto. Também neste caso chegar-se-á a uma fórmula fechada, mas com tempo discreto, o que leva a uma maior aproximação com a realidade. Este capítulo também teve como base Zhang (1998).

Proposição 2.1. *No caso de um número finito de observações do preço do ativo subjacente, a média geométrica, $G(T)$, do preço de um ativo subjacente S , que segue o movimento Browniano geométrico definido na equação (1.5), sobre o período de t a T , dividido em $n + 1$ partes iguais, é definida como:*

$$G(T) = S_t \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2} + \sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}} Z \right], \quad (2.1)$$

onde

$$Z := \frac{nZ_1 + (n-1)Z_2 + \cdots + Z_n}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}} \quad (2.2)$$

e Z_i tem distribuição normal com média 0 e variância 1, ou seja, $Z_i \sim N(0, 1)$.

Demonstração. Considerando a equação (1.5) e o facto de se estar a trabalhar em tempo discreto chega-se a

$$S_{t_i} := S_{t_{i-1}} \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sigma \sqrt{h} Z_i \right],$$

onde $h = \frac{\tau}{n}$. Passando para logaritmo e sem recursão, tem-se:

$$\ln(S_{t_i}) = \ln(S_t) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) ih + \sigma\sqrt{h} \sum_{k=1}^i Z_k. \quad (2.3)$$

A definição de média geométrica é

$$G(T) := \left(\prod_{i=0}^n S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (2.4)$$

logo passando a logaritmo e utilizando a equação (2.3), a equação (2.4) fica

$$\ln[G(T)] = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \left[\ln(S_t) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) ih + \sigma\sqrt{h} \sum_{k=1}^i Z_k \right].$$

Calculando os somatórios e sabendo que

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (2.5)$$

chega-se a

$$\begin{aligned} \ln[G(T)] &= \ln(S_t) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\tau}{n} \frac{1}{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \\ &\quad + \frac{\sigma\sqrt{h}}{n+1} (nZ_1 + (n-1)Z_2 + \dots + Z_n) \\ &= \ln(S_t) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\tau}{2} + \frac{\sigma\sqrt{h}}{n+1} (nZ_1 + (n-1)Z_2 + \dots + Z_n). \end{aligned}$$

Com alguns cálculos aritméticos chega-se a

$$\ln[G(T)] = \ln(S_t) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\tau}{2} + \sigma\sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}} Z,$$

logo

$$G(T) = S_t \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\tau}{2} + \sigma\sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}} Z \right],$$

em que Z está definido pela equação (2.2). □

Proposição 2.2. *No modelo de Black e Scholes (1973), o valor no momento t de uma opção asiática de compra sobre a média geométrica $G(T)$, com preço de exercício K e vencimento no momento T , em tempo discreto, é dado por*

$$C_t^d = e^{-r\tau} S_t \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2} + \frac{\sigma^2(2n+1)\tau}{12(n+1)} \right] \Phi \left[d^{Gd} + \sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}} \right] - e^{-r\tau} K \Phi \left[d^{Gd} \right], \quad (2.6)$$

onde

$$d^{Gd} := \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2}}{\sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}}}. \quad (2.7)$$

Demonstração. Inicialmente ir-se-á calcular o valor esperado e a variância de Z .

Usando a equação (2.2) e como o valor esperado de uma combinação linear é a combinação linear dos valores esperados, tem-se

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}} \left[n\mathbb{E}[Z_1] + (n-1)\mathbb{E}[Z_2] + \cdots + \mathbb{E}[Z_n] \right]. \quad (2.8)$$

Como Z_i tem distribuição $N(0, 1)$, então $\mathbb{E}[Z_i] = 0$. Assim, da equação (2.8) advém

$$\mathbb{E}[Z] = 0.$$

Calcula-se agora a variância de Z . Usando a definição de Z , tem-se

$$\text{var}[Z] = \frac{1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \text{var}[nZ_1 + (n-1)Z_2 + \cdots + Z_n].$$

Para facilitar, irá representar-se a soma em forma de somatório, ou seja,

$$nZ_1 + (n-1)Z_2 + \cdots + Z_n = \sum_{i=1}^n (n+1-i)Z_i.$$

Sabendo que $Z_i, i = 1, \dots, n$, são variáveis independentes e identicamente distribuídas, então a variância da soma é a soma das variâncias, logo

$$\text{var}[Z] = \frac{1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \sum_{i=1}^n (n+1-i)^2 \text{var}[Z_i].$$

Como Z_i tem distribuição Normal padrão, então $\text{var}[Z_i] = 1$. Desenvolvendo o quadrado e colocando as constantes para fora do somatório, fica-se com

$$\text{var}[Z] = \frac{1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \left[n^3 + 2n^2 - 2n \sum_{i=1}^n i + n - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n i^2 \right].$$

Pela equação (2.5) e visto que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

fazendo alguns cálculos aritméticos chega-se a

$$\text{var}[Z] = \frac{1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1.$$

Em suma, Z tem distribuição Normal com valor esperado 0 e variância 1.

Tal como no capítulo 1, temos que

$$C_t^d = e^{-r\tau} \mathbb{E}[(G(T) - K) \mathbb{I}_{\{G(T) \geq K\}} | \mathcal{F}_t]. \quad (2.9)$$

O raciocínio será o mesmo que no capítulo anterior. Neste caso a nossa variável aleatória Z segue uma distribuição normal com valor esperado 0 e variância 1. Deste modo, a equação (2.9) pode ser escrita como

$$C_t^d = e^{-rt} \int_{Z^*}^{+\infty} (G(T) - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right) dZ,$$

onde

$$Z^* := \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\tau}{2}}{\sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}}}. \quad (2.10)$$

Sabendo que o integral de uma combinação linear é a combinação linear dos integrais e ainda utilizando a equação (2.1), chega-se a

$$\begin{aligned} C_t^d &= e^{-r\tau} S_t \exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\tau}{2}\right] \\ &\quad \times \int_{Z^*}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{Z^2}{2} + \sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}} Z\right] dZ \\ &\quad - e^{-r\tau} K \int_{Z^*}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{Z^2}{2}\right] dZ. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Fazendo alguns cálculos aritméticos é possível mostrar que

$$\begin{aligned} & \exp \left[-\frac{Z^2}{2} + \sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}} Z \right] \\ = & \exp \left[-\frac{1}{2} \left(Z - \sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}} \right)^2 \right] \exp \left[\sigma^2 \frac{(2n+1)\tau}{12(n+1)} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Usando a equação (2.12) e utilizando a função cumulativa de probabilidade da Normal padrão bem como a equação (2.10), conclui-se que a equação (2.11) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} C_t^d &= e^{-r\tau} S_t \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2} + \sigma^2 \frac{(2n+1)\tau}{12(n+1)} \right] \\ &\quad \times \int_{Z^*}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(Z - \sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}} \right)^2 \right] dZ \\ &\quad - e^{-r\tau} K \Phi \left[-\frac{\ln \left(\frac{K}{S_t} \right) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2}}{\sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}}} \right] \\ &= e^{-r\tau} S_t \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2} + \sigma^2 \frac{(2n+1)\tau}{12(n+1)} \right] \\ &\quad \times \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2}}{\sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}}} + \sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}} \right] \\ &\quad - e^{-r\tau} K \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\tau}{2}}{\sigma \sqrt{\frac{(2n+1)\tau}{6(n+1)}}} \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Aplicando a equação (2.7) à equação (2.13), chega-se à equação (2.6). \square

Capítulo 3

Aproximação do preço de uma opção asiática com média aritmética

As opções asiáticas com média aritmética não têm uma fórmula de avaliação fechada, uma vez que a distribuição da média aritmética de variáveis aleatórias com distribuição lognormal não tem uma distribuição lognormal. Neste capítulo, irá aproximar-se a distribuição da média aritmética a uma lognormal, com base no que é descrito por Hull (2006, 16). Desta forma já é possível chegar a uma fórmula fechada.

Irá calcular-se os dois primeiros momentos da distribuição da média aritmética, considerando a medida neutra face ao risco, e de seguida aproxima-se a média aritmética a uma lognormal.

Tem-se que a definição de média aritmética em tempo contínuo sobre o preço de um ativo subjacente S desde o momento t até à maturidade T é

$$A(T) := \frac{1}{\tau} \int_t^T S_u du. \quad (3.1)$$

Proposição 3.1. *O primeiro momento (não central) da média aritmética sobre o preço de um ativo subjacente S desde o momento t até à maturidade T é*

$$M_1 = \frac{S_t (e^{(r-q)\tau} - 1)}{(r - q)\tau}. \quad (3.2)$$

Demonstração. Por definição sabe-se que o primeiro momento é o valor médio da variável, ou seja,

$$M_1 = \mathbb{E}[A(T)|\mathcal{F}_t].$$

Pela definição de $A(T)$ dada pela equação (3.1) e utilizando o teorema de Fubini, tem-se que

$$M_1 = \frac{1}{\tau} \int_t^T \mathbb{E}[S_u | \mathcal{F}_t] du. \quad (3.3)$$

Sabendo que

$$\mathbb{E}[S_u | \mathcal{F}_t] = S_t e^{(r-q)(u-t)} \quad (3.4)$$

e calculando o integral da equação (3.3) chega-se a

$$M_1 = \frac{1}{\tau} S_t \left[\frac{e^{(r-t)(u-t)}}{r-q} \right]_t^T.$$

Fazendo alguns cálculos, conclui-se que

$$M_1 = \frac{S_t (e^{(r-q)\tau} - 1)}{(r-q)\tau}.$$

□

Proposição 3.2. *O segundo momento (não central) da média aritmética sobre o preço de um ativo subjacente S desde o momento t até à maturidade T é*

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{2 \exp [(2(r-q) + \sigma^2)\tau] S_t^2}{(r-q + \sigma^2)(2r-2q + \sigma^2)\tau^2} \\ &+ \frac{2S_t^2}{(r-q)\tau^2} \left[\frac{1}{2(r-q) + \sigma^2} - \frac{\exp [(r-q)\tau]}{r-q + \sigma^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Demonstração. Tem-se que o segundo momento é definido por

$$M_2 = \mathbb{E}[A(\tau)^2 | \mathcal{F}_t]. \quad (3.6)$$

Usando a equação (3.1) e substituindo S_u pela solução do processo do movimento Browniano geométrico, chega-se a

$$M_2 = \frac{1}{\tau^2} \mathbb{E} \left\{ \left[\int_t^T S_t \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (u-t) \right] \exp [\sigma (W_u - W_t)] du \right]^2 | \mathcal{F}_t \right\}.$$

Desenvolvendo o quadrado obtém-se

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{1}{\tau^2} \int_t^T \int_t^T S_t^2 \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (u-t) \right] \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (v-t) \right] \\ &\times \mathbb{E} \left\{ \exp \left[\sigma \left((W_u - W_t) + (W_v - W_t) \right) \right] | \mathcal{F}_t \right\} dudv. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para calcular o valor esperado contido na equação (3.7) é necessário calcular a variância de $(W_u - W_t) + (W_v - W_t)$. Tem-se que o valor esperado desta variável é 0, por ser a soma de valores esperados de incrementos de um movimento Browniano. Pela definição de variância de soma de variáveis aleatórias, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{var}[(W_u - W_t) + (W_v - W_t) | \mathcal{F}_t] &= \text{var}[W_u - W_t | \mathcal{F}_t] + \text{var}[W_v - W_t | \mathcal{F}_t] \\ &\quad + 2\text{cov}[W_u - W_t, W_v - W_t | \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Usando a equação (3.8) e sabendo que as variáveis aleatórias em apreço são incrementos de um movimentos Browniano, chega-se a

$$\text{var}[(W_u - W_t) + (W_v - W_t) | \mathcal{F}_t] = (u - t) + (v - t) + 2(u \wedge v - t). \quad (3.9)$$

Utilizando a equação (3.9), a equação (3.7) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} M_2 &= S_t^2 \int_t^T \int_t^T \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (u - t) \right] \exp \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (v - t) \right] \\ &\quad \times \exp \left[\frac{\sigma^2}{2} ((u - t) + (v - t) + 2(u \wedge v - t)) \right] dudv. \end{aligned}$$

Somando as parcelas simétricas e desenvolvendo a função mínimo

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{S_t^2}{\tau^2} \int_t^T \int_t^T \exp [(r - q)(u - t)] \exp [(r - q)(v - t)] \\ &\quad \times \exp [\sigma^2(u - t)] \mathbb{I}_{\{u \leq v\}} dudv \\ &\quad + \frac{S_t^2}{\tau^2} \int_t^T \int_t^T \exp [(r - q)(u - t)] \exp [(r - q)(v - t)] \\ &\quad \times \exp [\sigma^2(v - t)] \mathbb{I}_{\{u > v\}} dudv. \end{aligned} \quad (3.10)$$

O primeiro integral da equação (3.10) é 0 sempre que $u > v$, logo pode-se alterar o limite superior de integração para v . O mesmo acontece no outro integral, mas neste caso o limite de integração altera-se para u .

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{S_t^2}{\tau^2} \int_t^T dv \int_t^v du \exp [(r - q + \sigma^2)(u - t)] \exp [(r - q)(v - t)] \\ &\quad + \frac{S_t^2}{\tau^2} \int_t^T du \int_t^u dv \exp [(r - q)(u - t)] \exp [(r - q + \sigma^2)(v - t)]. \end{aligned}$$

Calculando os integrais chega-se a

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{S_t^2}{\tau^2} \int_t^T dv \exp[(r-q)(v-t)] \left[\frac{\exp[(r-q+\sigma^2)(u-t)]}{r-q+\sigma^2} \right]_t^v \\
&\quad + \frac{S_t^2}{\tau^2} \int_t^T du \exp[(r-q)(u-t)] \left[\frac{\exp[(r-q+\sigma^2)(v-t)]}{r-q+\sigma^2} \right]_t^u.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Os integrais da equação (3.11) são iguais, logo conclui-se que

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{2S_t^2}{\tau^2} \int_t^T \exp[(r-q)(u-t)] \left[\frac{\exp[(r-q+\sigma^2)(u-t)] - 1}{r-q+\sigma^2} \right] du \\
&= \frac{2S_t^2}{\tau^2} \int_t^T \frac{\exp[(2(r-q)+\sigma^2)(u-t)] - \exp[(r-q)(u-t)]}{r-q-\sigma^2} du
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Calculando o integral da equação (3.12) e simplificando a equação, conclui-se que

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{2 \exp[(2(r-q)+\sigma^2)\tau] S_t^2}{(r-q+\sigma^2)(2r-2q+\sigma^2)\tau^2} \\
&\quad + \frac{2S_t^2}{(r-q)\tau^2} \left[\frac{1}{2(r-q)+\sigma^2} - \frac{\exp[(r-q)\tau]}{r-q+\sigma^2} \right]
\end{aligned}$$

□

Deste modo, assumindo que a média aritmética dos preços segue uma distribuição lognormal e fazendo o *matching* dos dois primeiros momentos, pode ser usado o modelo de Black (1976). Assim, chegamos à seguinte proposição

Proposição 3.3. *O preço de uma opção de compra asiática com média aritmética, com preço de exercício K e maturidade no momento T , pode ser aproximado por*

$$C_t^A = e^{-r\tau} F_t \Phi[d^A] - e^{-r\tau} K \Phi[d^A - \sigma\sqrt{\tau}], \tag{3.13}$$

onde

$$d^A = \frac{\ln\left[\frac{F_t}{K}\right] + \sigma^2 \frac{\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad F_t = M_1, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\tau} \ln\left(\frac{M_2}{M_1^2}\right)$$

e M_1 e M_2 estão definidos pelas equações (3.2) e (3.5), respectivamente.

Demonstração. A equação (3.13) corresponde ao modelo de Black (1976) e é obtida com base no seguinte processo estocástico¹:

$$\frac{dF_t}{F_t} = 0 \times dt + \sigma dW_t. \quad (3.14)$$

Resolvendo a equação diferencial (3.14) obtém-se que

$$\begin{aligned} F_T &= F_t \exp \left[\left(0 - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma \int_t^T dW_u \right] \\ &= F_t \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2} \tau + \sigma \int_t^T dW_u \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Calcula-se agora o valor esperado de F_T . Usando a equação (3.15) e sabendo que o valor esperado de uma constante é a própria constante, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_T | \mathcal{F}_t] &= F_t e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau} \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_t^T dW_u \right) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= F_t e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau} \exp \left[0 \times \sigma + \frac{\sigma^2}{2} \tau \right]. \end{aligned}$$

Simplificando chega-se a

$$\mathbb{E}[F_T | \mathcal{F}_t] = F_t. \quad (3.16)$$

Como M_1 é o valor esperado da média aritmética sobre o activo subjacente conclui-se que

$$F_t = M_1.$$

Agora, calcula-se a variância de F_T . Usando a definição de variância e a equação (3.16)

$$\text{var}[F_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[F_T^2 | \mathcal{F}_t] - (F_t)^2.$$

Utilizando a definição de F_T dada pela equação (3.15) e calculando o quadrado

$$\begin{aligned} \text{var}[F_T | \mathcal{F}_t] &= F_t^2 e^{-\sigma^2 \tau} \mathbb{E} \left[\exp \left[2\sigma \int_t^T dW_u \right] | \mathcal{F}_t \right] - F_t^2 \\ &= F_t^2 e^{-\sigma^2 \tau} \exp \left(2\sigma \times 0 + \frac{4\sigma^2}{2} \tau \right) \\ &= F_t^2 e^{\sigma^2 \tau} - F_t^2. \end{aligned}$$

Pela forma que foi definido M_2 na equação (3.6), tem-se que

$$M_2 = F_t^2 e^{\sigma^2 \tau},$$

¹Processo utilizado para avaliar opções sobre futuros.

logo com alguns cálculos, conclui-se que

$$\sigma^2 = \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{M_2}{M_1^2} \right).$$

□

Capítulo 4

Aproximação do preço de uma opção asiática com média aritmética através de limites

O objetivo desta secção é chegar a um limite superior e a um limite inferior para o preço de uma opção asiática com média aritmética, já que não é possível chegar a uma fórmula fechada para a mesma. A sugestão dos limites é proveniente do trabalho de Nielsen e Sandmann (2003). Para obter-se o limite inferior irá ser explorada a seguinte inequação resultante da desigualdade de Jensen:

$$\mathbb{E}[(A(T) - K)^+] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(A(T) - K)^+ | Z_A]] \geq \mathbb{E}[(\mathbb{E}[A(T) - K | Z_A])^+], \quad (4.1)$$

sendo $A(T)$ a média aritmética dos preços do ativo subjacente S e Z_A é definido como uma variável aleatória com distribuição normal padrão (por exemplo, o logaritmo da média geométrica estandarizada).

Proposição 4.1. *Sob a medida de martigala equivalente, o preço do ativo subjacente segue a equação diferencial estocástica (1.5). Seja Z_A , a variável aleatória condicional, dada por*

$$Z_A = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^N W_{t_i}, \quad (4.2)$$

onde a constante normalizadora α é dada por

$$\alpha^2 = \text{var} \left[\sum_{i=1}^N W_{t_i} \right]. \quad (4.3)$$

O limite inferior C_A^{l,Z_A} , para uma opção asiática com preço de exercício K , sobre a média aritmética e maturidade T é dado pela seguinte média de preços de opções de compra europeias de tipo "delayed payment"

$$\begin{aligned} C_A^{l,Z_A}(K, T) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C(T, K^*, t_i, \bar{\sigma}_i) \\ &= \frac{S_0}{N} \sum_{i=1}^N \exp[-(r-q)(T-t_i)] \Phi(-Z_A^* + \sigma m_i) \\ &\quad - \exp[-rT] K \Phi(-Z_A^*), \end{aligned} \quad (4.4)$$

sendo

$$K_i^* := S_0 \exp \left[(r-q)t_i - \frac{\sigma^2}{2} m_i^2 + \sigma m_i Z_A^* \right], \quad (4.5)$$

$$m_i = \mathbb{E}[Z_A W_{t_i}] = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^N \min\{t_i, t_j\}, \quad (4.6)$$

$$\bar{\sigma}_i \sqrt{t_i} = \sigma m_i \quad (4.7)$$

e

$$Z_A^* := \left\{ Z_A \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^N S_0 \exp \left[(r-q)t_i + \sigma m_i Z_A - \frac{\sigma^2}{2} m_i^2 \right] - NK = 0 \right\}. \quad (4.8)$$

Demonstração. Z_A é uma variável aleatória com distribuição Normal padrão e de acordo com Nielsen e Sandmann (2003) tem-se que

$$\mathbb{E}[W_{t_i} | Z_A] = m_i Z_A, \quad (4.9)$$

e

$$\text{cov}[W_{t_i}, W_{t_j} | Z_A] = \min\{t_i, t_j\} - m_i m_j. \quad (4.10)$$

O limite inferior proposto por Rogers and Shi (1995) é igual a

$$\begin{aligned} &C_A^{l,Z_A}(K, T) \\ &= \frac{e^{-rT}}{N} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \left(S_0 \exp \left\{ (r-q)t_i - \frac{\sigma^2 t_i}{2} + \sigma W_{t_i} \right\} - NK \right) \middle| Z_A \right]^+ \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sabendo que o valor esperado da soma é a soma dos valores esperados, o valor esperado de uma constante é ela própria e que as constantes podem passar para fora do valor esperado, a equação (4.11) pode ser simplificada para

$$\begin{aligned} & C_A^{l,Z_A}(K, T) \\ &= \frac{e^{-rT}}{N} \mathbb{E} \left[\left[\sum_{i=1}^N S_0 \left(\exp \left\{ (r-q)t_i - \frac{\sigma^2 t_i}{2} \right\} \mathbb{E} \left[\exp(\sigma W_{t_i}) \middle| Z_A \right] \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - NK \right]^+ \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Tem-se que $\mathbb{E}[e^{\sigma W_{t_i}} | Z_A]$ é a função geradora de momentos de uma Normal. Consequentemente,

$$\mathbb{E}[e^{\sigma W_{t_i}} | Z_A] = \exp \left[\sigma \mathbb{E}(W_{t_i} | Z_A) + \frac{\sigma^2}{2} \text{var}(W_{t_i} | Z_A) \right]. \quad (4.13)$$

Usando as equações (4.9) e (4.10), conclui-se que

$$\mathbb{E}[e^{\sigma W_{t_i}} | Z_A] = \exp \left[\sigma m_i Z_A + \frac{\sigma^2}{2} (t_i - m_i^2) \right]. \quad (4.14)$$

Usando a equação (4.14), a equação (4.12) pode ser reescrita como

$$C_A^{l,Z_A}(K, T) = \frac{e^{-rT}}{N} \mathbb{E} \left[\left[\sum_{i=1}^N S_0 \exp \left((r-q)t_i + \sigma m_i Z_A - \frac{\sigma^2}{2} m_i^2 \right) - NK \right]^+ \right]. \quad (4.15)$$

Tomando a equação (4.8) e visto que $m_i > 0, \forall i$, a expressão que se encontra dentro do valor esperado da equação (4.15) apenas é positiva ou igual a zero quando $Z_A \geq Z_A^*$. Assim, podemos substituir a função máximo pela função indicatriz

$$\begin{aligned} C_A^{l,Z_A}(K, T) &= \frac{e^{-rT}}{N} \mathbb{E} \left[\left[\sum_{i=1}^N S_0 \exp \left((r-q)t_i + \sigma m_i Z_A - \frac{\sigma^2}{2} m_i^2 \right) \mathbb{I}_{\{Z_A \geq Z_A^*\}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - NK \mathbb{I}_{\{Z_A \geq Z_A^*\}} \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Usando a transformação

$$NK = \sum_{i=1}^N S_0 \exp \left[(r-q)t_i - \frac{\sigma^2}{2} m_i^2 + \sigma m_i Z_A^* \right] \quad (4.17)$$

na equação (4.16), obtém-se

$$C_A^{l,Z_A}(K, T) = \frac{e^{-rT}}{N} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^N S_0 \exp \left((r-q)t_i + \sigma m_i Z_A - \frac{\sigma^2}{2} m_i^2 \right) \mathbb{I}_{\{Z_A \geq Z_A^*\}} \right) - \left(\sum_{i=1}^N S_0 \exp \left[(r-q)t_i - \frac{\sigma^2}{2} m_i^2 + \sigma m_i Z_A^* \right] \mathbb{I}_{\{Z_A \geq Z_A^*\}} \right) \right] \quad (4.18)$$

Utilizando a equação (4.5) e sabendo que o valor esperado de uma soma é a soma dos valores esperados, consegue-se escrever a equação (4.18) do seguinte modo

$$C_A^{l,Z_A}(K, T) = \frac{e^{-rT}}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \left[S_0 \exp \left((r-q)t_i + \sigma m_i Z_A - \frac{\sigma^2}{2} m_i^2 \right) \mathbb{I}_{\{Z_A \geq Z_A^*\}} - K_i^* \mathbb{I}_{\{Z_A \geq Z_A^*\}} \right],$$

ou seja,

$$C_A^{l,Z_A}(K, T) = \frac{e^{-rT}}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \left[\left(S_0 \exp \left((r-q)t_i + \bar{\sigma}_i \sqrt{t_i} Z_A - \frac{\bar{\sigma}_i^2}{2} t_i \right) - K_i^* \right) \mathbb{I}_{\{Z_A \geq Z_A^*\}} \right], \quad (4.19)$$

em virtude da equação (4.7).

Utilizando a definição de valor esperado e sabendo que Z_A é uma variável aleatória com distribuição Normal padrão, tem-se que

$$C_A^{l,Z_A}(K, T) = \frac{e^{-rT}}{N} \sum_{i=1}^N \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_0 \exp \left((r-q)t_i + \bar{\sigma}_i \sqrt{t_i} Z_A - \frac{\bar{\sigma}_i^2}{2} t_i \right) \times \mathbb{I}_{\{Z_A \geq Z_A^*\}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{Z_A^2}{2}} dZ_A - \int_{-\infty}^{+\infty} K_i^* \mathbb{I}_{\{Z_A \geq Z_A^*\}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{Z_A^2}{2}} dZ_A \right]. \quad (4.20)$$

Usando o mesmo raciocínio utilizado na demonstração da Proposição 2.2. e sabendo que $\exp \left[-\frac{Z_A^2}{2} + \bar{\sigma}_i \sqrt{t_i} Z_A \right] = \exp \left[-\frac{(Z_A - \bar{\sigma}_i \sqrt{t_i})^2}{2} + \frac{\bar{\sigma}_i^2}{2} t_i \right]$, a equação (4.20) pode ser reescrita como

$$C_A^{l,Z_A}(K, T) = \frac{e^{-rT}}{N} \sum_{i=1}^N \left[S_0 \exp [(r-q)t_i] \Phi(-Z_A^* + \bar{\sigma}_i \sqrt{t_i}) - K_i^* \Phi(-Z_A^*) \right].$$

Usando as equações (4.7) e (4.17), conclui-se que

$$C_A^{l,Z_A}(K, T) = \frac{S_0 e^{-rT}}{N} \sum_{i=1}^N \exp[(r - q)t_i] \Phi(-Z_A^* + \bar{\sigma}_i \sqrt{t_i}) - \frac{e^{-rT}}{N} K \Phi(-Z_A^*).$$

□

O limite superior é obtido somando um erro ao limite inferior, que se denota por ε e representa o erro que é cometido por se utilizar a *conditioning approach*.

Proposição 4.2. *O limite superior de uma opção asiática de compra com média aritmética define-se como*

$$C_A^{u,Z_A} = C_A^{l,Z_A} + \varepsilon, \quad (4.21)$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{S_0 e^{-rT}}{2N} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \exp[(r - q)(t_i + t_j) + \sigma^2 m_i m_j] \right. \\ & \left. \times \left(\exp(\sigma^2 \min\{t_i, t_j\} - m_i m_j) - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Demonstração. A equação (4.1) pode ser reescrita como

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}[(A(T) - K)^+ | Z_A] | \mathcal{F}_0\right\} - \mathbb{E}\left\{\left[\mathbb{E}[(A(T) - K) | Z_A]\right]^+ | \mathcal{F}_0\right\} \geq 0. \quad (4.23)$$

Como a soma de dois valores esperados é o valor esperado da soma, chega-se que

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}[(A(T) - K)^+ | Z_A] - \left[\mathbb{E}[(A(T) - K) | Z_A]\right]^+ | \mathcal{F}_0\right\} \geq 0. \quad (4.24)$$

Temos que o primeiro termo da inequação (4.24) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}[(A(T) - K)^+ | Z_A] - \left[\mathbb{E}[(A(T) - K) | Z_A]\right]^+\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbb{E}[(A(T) - K)^+ | Z_A] - \left[\mathbb{E}[(A(T) - K) | Z_A]\right]^+\right) f(Z_A) dZ_A, \end{aligned} \quad (4.25)$$

sendo $f(Z_A)$ a função densidade de probabilidade da variável aleatória Z_A . Rogers and Shi (1995) mostram que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(A(T) - K)^+ | Z_A] - \left[\mathbb{E}[(A(T) - K) | Z_A]\right]^+ &\leq \frac{1}{2} (\text{var}[A(T) - K | Z_A])^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} (\text{var}[A(T) | Z_A])^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Aplicando a inequação (4.26) à equação (4.25), observa-se que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}[(A(T) - K)^+ | Z_A] - [\mathbb{E}[(A(T) - K) | Z_A]]^+\right\} \\ & \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (\text{var}[A(T) | Z_A])^{\frac{1}{2}} f(Z_A) dZ_A \\ & \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[(\text{var}[A(T) | Z_A])^{\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Usando a inequação de Hölder, chega-se a

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}[(A(T) - K)^+ | Z_A] - [\mathbb{E}[(A(T) - K) | Z_A]]^+\right\} \leq \frac{1}{2} \left(\mathbb{E}[\text{var}[A(T) | Z_A]]\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.28)$$

Deste modo, o erro é dado pelo valor presente de $\frac{1}{2} \mathbb{E}\left[(\text{var}[A(T) | Z_A])^{\frac{1}{2}}\right]$, ou seja,

$$\varepsilon = \frac{e^{-rT}}{2} \left(\mathbb{E}[\text{var}[A(T) | Z_A]]\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.29)$$

A variância pode ser escrita como a soma das covariâncias das variáveis aleatórias. Assim pode-se escrever a equação (4.29) do seguinte modo

$$\mathbb{E}[\text{var}[A(T) | Z_A]] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{cov}(S_{t_i}, S_{t_j} | Z_A)\right]. \quad (4.30)$$

Para facilitar os cálculos da covariância, ir-se-á calcular o valor esperado e a variância das variáveis aleatórias $\int_0^{t_i} dW_u$ e $\left(\int_0^{t_i} dW_u + \int_0^{t_j} dW_u\right)$. Para a primeira variável aleatória basta usar as equações (4.9) e (4.10),

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{t_i} dW_u \middle| Z_A\right] = m_i Z_A, \quad (4.31)$$

$$\text{var}\left[\int_0^{t_i} dW_u \middle| Z_A\right] = \text{cov}\left(\int_0^{t_i} dW_u, \int_0^{t_i} dW_u \middle| Z_A\right) = t_i - m_i^2. \quad (4.32)$$

No caso da variável aleatória $\left(\int_0^{t_i} dW_u + \int_0^{t_j} dW_u\right)$, além de se usar as equações (4.9) e (4.10), teremos de usar também as equações (4.31) e (4.32) e ainda a definição da variância da soma de duas variáveis aleatórias,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{t_i} dW_u + \int_0^{t_j} dW_u \middle| Z_A\right] = m_i Z_A + m_j Z_A, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
var \left[\int_0^{t_i} dW_u + \int_0^{t_j} dW_u \middle| Z_A \right] &= var \left[\int_0^{t_i} dW_u \middle| Z_A \right] + var \left[\int_0^{t_j} dW_u \middle| Z_A \right] \\
&\quad + 2cov \left[\int_0^{t_i} dW_u, \int_0^{t_j} dW_u \middle| Z_A \right] \\
&= t_i - m_i^2 + t_j - m_j^2 + 2min(t_i, t_j) - 2m_i m_j.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Utilizando as equações (4.31) e (4.32) e sabendo que

$$cov(X, Y | Z_A) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) | Z_A] \tag{4.35}$$

e

$$\mathbb{E}[S_{t_i} | Z_A] = e^{(r-q)t_i} \exp \left[\sigma m_i Z_A - \frac{\sigma^2}{2} m_i^2 \right], \tag{4.36}$$

conclui-se que a covariância pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
cov(S_{t_i}, S_{t_j} | Z_A) &= S_0^2 e^{(r-q)(t_i+t_j)} \left\{ exp \left[-\frac{\sigma^2}{2} (t_i + t_j) \right] \right. \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_0^{t_i} dW_u + \sigma \int_0^{t_j} dW_u \right) \middle| Z_A \right] \\
&\quad - exp \left[\sigma m_j Z_A - \frac{\sigma^2}{2} m_j^2 - \frac{\sigma^2}{2} t_i \right] \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_0^{t_i} dW_u \right) \middle| Z_A \right] \\
&\quad - exp \left[\sigma m_i Z_A - \frac{\sigma^2}{2} m_i^2 - \frac{\sigma^2}{2} t_j \right] \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_0^{t_j} dW_u \right) \middle| Z_A \right] \\
&\quad \left. + exp \left[\sigma m_i Z_A - \frac{\sigma^2}{2} m_i^2 + \sigma m_j Z_A - \frac{\sigma^2}{2} m_j^2 \right] \right\} \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Usando as equações (4.31), (4.32), (4.33) e (4.34), a equação (4.37) pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
cov(S_{t_i}, S_{t_j} | Z_A) &= S_0^2 e^{(r-q)(t_i+t_j)} \\
&\quad \times \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} (\sigma m_i + \sigma m_j)^2 + \sigma^2 min(t_i, t_j) + (\sigma m_i + \sigma m_j) Z_A \right] \right. \\
&\quad \left. - \exp \left[(\sigma m_i + \sigma m_j) Z_A - \frac{\sigma^2}{2} (m_j^2 + m_i^2) \right] \right\} \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Utilizando a equação (4.38), a equação (4.30) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{var}[A(T)|Z_A]] &= \frac{S_0^2}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e^{(r-q)(t_i+t_j)} \\
&\times \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2}(\sigma m_i + \sigma m_j)^2 + \sigma^2 \min(t_i, t_j) \right] \right. \\
&\times \mathbb{E}[\exp[(\sigma m_i + \sigma m_j)Z_A]] \\
&\left. - \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2}(m_j^2 + m_i^2) \right] \mathbb{E}[\exp[(\sigma m_i + \sigma m_j)Z_A]] \right\} \\
&\quad (4.39)
\end{aligned}$$

Usando a função geradora de momentos de uma variável aleatória com distribuição normal, chega-se a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{var}[A(T)|Z_A]] &= \frac{S_0^2}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \exp[(r-q)(t_i+t_j) + \sigma^2 m_i m_j] \\
&\times \left(\exp(\sigma^2 \min\{t_i, t_j\} - m_i m_j) - 1 \right) \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Aplicando a equação (4.40) à equação (4.29), conclui-se que

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{S_0 e^{-rT}}{2N} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \exp[(r-q)(t_i+t_j) + \sigma^2 m_i m_j] \right. \\
&\times \left. \left(\exp(\sigma^2 \min\{t_i, t_j\} - m_i m_j) - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 5

Resultados Numéricos

As fórmulas de avaliação obtidas nos capítulos anteriores foram aplicadas num caso prático. Os cálculos numéricos que serão apresentados foram elaborados para as maturidades de 3 e 10 anos usando a volatilidade, σ , igual a 0,25, a taxa de juro sem risco, r , igual a 4%, o preço do ativo subjacente no momento atual, S_0 , igual a 100 e a *dividend yield*, q , igual a 0. Considera-se que o intervalo de t_i para t_{i+1} é de 1 mês.

Nas Tabelas 1 e 2, comparam-se as várias aproximações que se descreveram ao longo deste trabalho. As colunas referentes à média geométrica foram calculadas com base nas secções 1 e 2, sendo a primeira calculada em tempo contínuo e a segunda em tempo discreto. A coluna alusiva à média aritmética é relativa à aproximação calculada no capítulo 3. Por fim, as duas últimas colunas dizem respeito à *conditioning approach* desenvolvida no capítulo 4, a qual visa chegar a dois limites, um inferior e outro superior.

A primeira coluna de ambas as tabelas diz respeito ao preço de exercício. Os valores escolhidos permitem observar preços de opções desde *far in-of-money* ($K = 50$) até *far out-of-money* ($K = 200$).

Na primeira tabela pode-se observar que os valores obtidos para os preços de uma opção asiática com média geométrica em tempo contínuo e de uma opção em tempo discreto são muito semelhantes, já que a diferença é de milésimas ou até menos. Quando se compara esta última com o limite inferior, observa-se uma grande diferença nos valores. Na Figura 5.1 constata-se que as duas aproximações têm curvas muito parecidas. Ao analisar-se a diferença destas duas aproximações verifica-se que o erro diminui à medida que K aumenta, mas se se observar esta diferença como um rácio entre as duas aproximações, conclui-se que este rácio é maior quando K aumenta. Assim, quanto mais *far out-the-money* for a opção, maior é o erro cometido entre o preço de uma opção asiática com média geométrica em tempo discreto e o respetivo limite inferior.

| K | Média Geométrica | | Média Aritmética | Condicional Approach | |
|-----|------------------|----------|------------------|----------------------|-----------------|
| | Contínuo | Discreto | Contínuo | Limite inferior | Limite Superior |
| 50 | 48,3776 | 48,3761 | 49,8945 | 50,0473 | 50,6536 |
| 60 | 39,5815 | 39,5799 | 41,0974 | 41,2289 | 41,8352 |
| 70 | 31,0659 | 31,0640 | 32,5677 | 32,6596 | 33,2659 |
| 80 | 23,2310 | 23,2286 | 24,6798 | 24,7461 | 25,3525 |
| 90 | 16,5122 | 16,5093 | 17,8465 | 17,9314 | 18,5378 |
| 100 | 11,1761 | 11,1730 | 12,3347 | 12,4759 | 13,0823 |
| 110 | 7,2363 | 7,2333 | 8,1820 | 8,3857 | 8,9921 |
| 120 | 4,5084 | 4,5058 | 5,2364 | 5,4813 | 6,0876 |
| 130 | 2,7192 | 2,7171 | 3,2513 | 3,5056 | 4,1120 |
| 140 | 1,5968 | 1,5952 | 1,9687 | 2,2056 | 2,8119 |
| 150 | 0,9175 | 0,9164 | 1,1680 | 1,3711 | 1,9775 |
| 160 | 0,5182 | 0,5174 | 0,6817 | 0,8453 | 1,4517 |
| 170 | 0,2887 | 0,2882 | 0,3928 | 0,5183 | 1,1247 |
| 180 | 0,1592 | 0,1589 | 0,2240 | 0,3168 | 0,9232 |
| 190 | 0,0871 | 0,0869 | 0,1268 | 0,1934 | 0,7998 |
| 200 | 0,0474 | 0,0472 | 0,0714 | 0,1181 | 0,7245 |

Tabela 5.1: Tempo para a maturidade 3 anos

Comparando agora o limite inferior com a aproximação feita para o preço de uma opção asiática com média aritmética com tempo contínuo, a Figura 5.2 demonstra que as curvas têm a mesma tendência e podemos ver pela Tabela 5.1 que a diferença entre os valores das duas aproximações é menor que a diferença analisada no ponto anterior. Além disso pode-se observar que o rácio é menor em todos os valores de K e que tem um crescimento mais acentuado em $K \geq 120$.

Em relação à diferença entre o limite superior e o limite inferior, esta vai ser sempre igual a ε , definido na Proposição 4.2., pois este erro não depende de K . Deste modo, numa qualquer maturidade, a diferença entre os dois limites irá ser sempre a mesma em diferentes preços de exercício. O que se pode constatar é que quanto maior é o tempo de maturidade maior é o erro. Para $T = 3$ temos $\varepsilon = 0,6064$ e para $T = 10$ obtém-se $\varepsilon = 2,3054$.

Para uma maturidade de 10 anos, na Tabela 5.2 observa-se que as aproximações referentes à média geométrica continuam muito próximas, mas quando se compara com o limite inferior já existe uma diferença considerável. Deste modo, quanto maior é a maturidade, mais desadequadas são as aproximações com base na média geométrica.

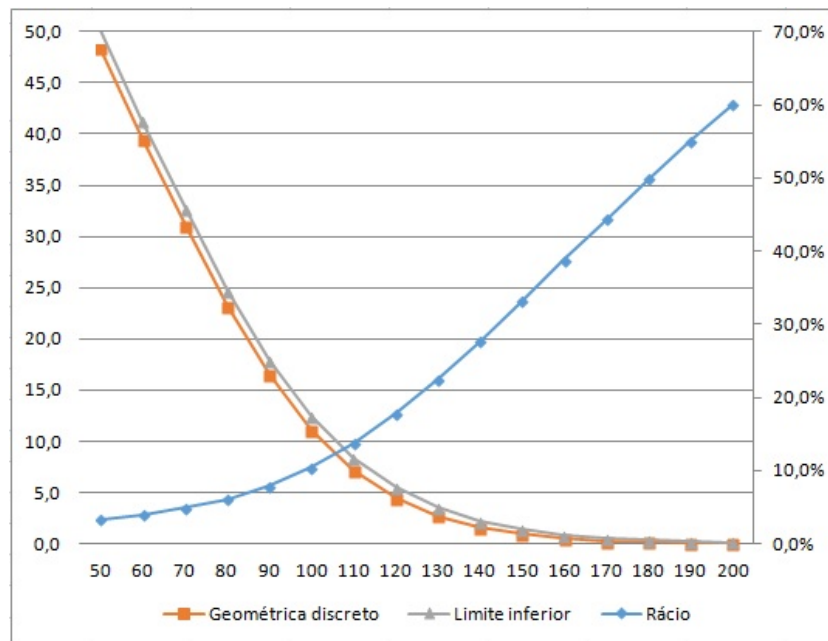


Figura 5.1: Comparação entre a média geométrica em tempo discreto e o limite inferior.

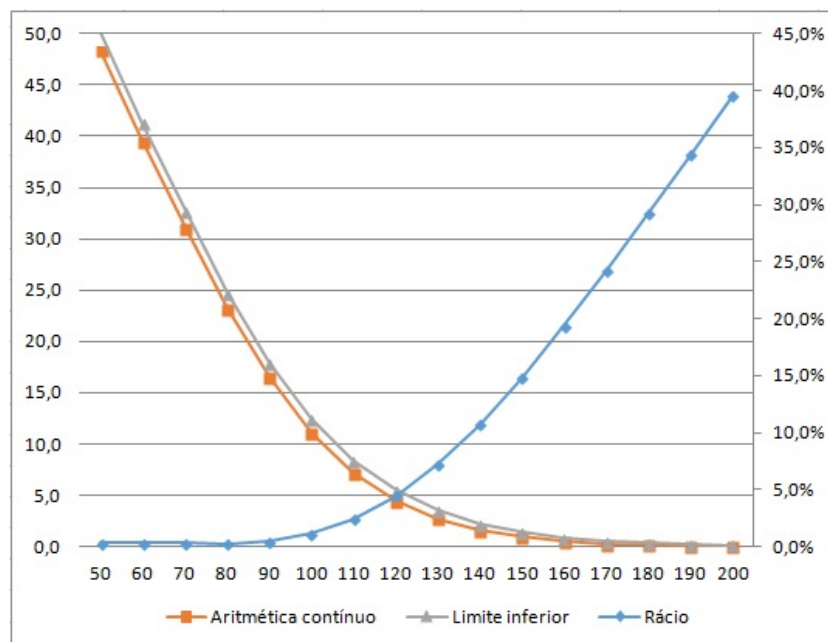


Figura 5.2: Comparação entre a média aritmética em tempo contínuo e o limite inferior.

Comparando agora o limite inferior com a aproximação referente à média aritmética com tempo contínuo, os valores desta última são sempre maiores que os valores do limite inferior. Pela Figura 5.3, observa-se que os preços diminuem de uma forma mais gradual quando o K aumenta. Também aqui o rácio aumenta de forma mais gradual, ficando a linha do gráfico referente a este rácio muito semelhante a uma função linear. Assim, para maturidades grandes, o erro tem um aumento mais uniforme mesmo para preços de exercício altos, ao contrário do que acontece para maturidades pequenas.

| K | Média Geométrica | | Média Aritmética | <i>Conditional Approach</i> | |
|------------|-------------------------|----------|-------------------------|-----------------------------|-----------------|
| | Contínuo | Discreto | Contínuo | Limite inferior | Limite Superior |
| 50 | 44,4945 | 44,4902 | 49,2372 | 49,1961 | 51,5014 |
| 60 | 38,3333 | 38,3285 | 43,0894 | 42,8981 | 45,2035 |
| 70 | 32,6348 | 32,6297 | 37,3721 | 37,0396 | 39,3450 |
| 80 | 27,5013 | 27,4958 | 32,1692 | 31,7372 | 34,0426 |
| 90 | 22,9811 | 22,9753 | 27,5214 | 27,0436 | 29,3489 |
| 100 | 19,0752 | 19,0693 | 23,4319 | 22,9583 | 25,2637 |
| 110 | 15,7509 | 15,7450 | 19,8768 | 19,4464 | 21,7517 |
| 120 | 12,9551 | 12,9493 | 16,8157 | 16,4536 | 18,7589 |
| 130 | 10,6254 | 10,6199 | 14,1991 | 13,9184 | 16,2238 |
| 140 | 8,6978 | 8,6926 | 11,9751 | 11,7793 | 14,0847 |
| 150 | 7,1114 | 7,1066 | 10,0927 | 9,9786 | 12,2840 |
| 160 | 5,8109 | 5,8065 | 8,5043 | 8,4645 | 10,7699 |
| 170 | 4,7478 | 4,7438 | 7,1669 | 7,1918 | 9,4971 |
| 180 | 3,8803 | 3,8767 | 6,0424 | 6,1215 | 8,4268 |
| 190 | 3,1733 | 3,1700 | 5,0978 | 5,2206 | 7,5260 |
| 200 | 2,5974 | 2,5945 | 4,3046 | 4,4615 | 6,7668 |

Tabela 5.2: Tempo para a maturidade 10 anos

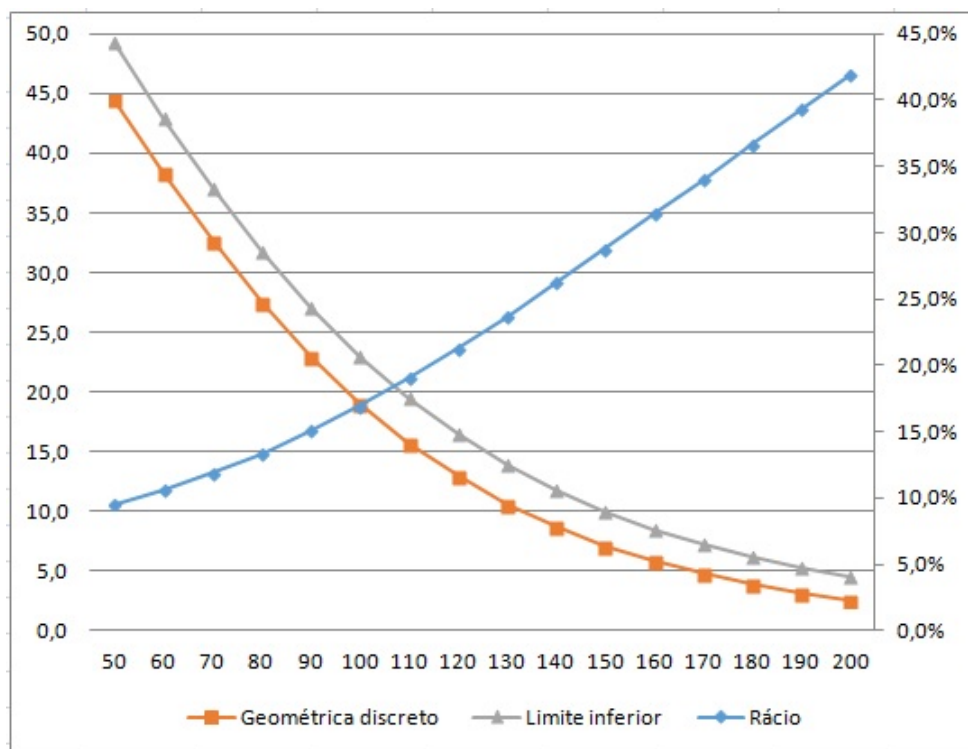


Figura 5.3: Comparação entre a média aritmética em tempo contínuo e o limite inferior.

Conclusão

Neste trabalho foram expostas três aproximações, um limite inferior e um limite superior para o preço de uma opção asiática com média aritmética em tempo discreto. Duas das aproximações são iguais à fórmula fechada do preço de uma opção asiática com média geométrica, uma em tempo contínuo e outra em tempo discreto. A última aproximação teve como base a média aritmética em tempo contínuo. Os limites foram obtidos com base na *conditioning approach*. Todos foram implementados recorrendo ao Excel, visto que são fórmulas muito simples e muito rápidas de calcular. A maior dificuldade consistiu no cálculo de Z_A^* , tendo sido rapidamente ultrapassada usando a ferramenta Solver para otimizar Z_A de forma a satisfazer a equação (4.8).

Os preços de opções asiáticas com média geométrica em tempo contínuo e em tempo discreto foram bastantes satisfatórios para maturidades pequenas, exceptuando quando a opção está *deep out-of-money*. Para maturidades maiores, estes valores não demonstraram ser boas aproximações.

A aproximação calculada com base na média aritmética em tempo contínuo relevou ser bastante precisa tanto para maturidades pequenas como grandes e ainda para todo o intervalo de preços de exercício que foi apresentado.

No caso do limite superior, o erro é sempre igual numa certa maturidade, uma vez que não depende do preço de exercício. Quando o preço de exercício aumenta, o valor da opção vai diminuindo, e por isso o erro vai ter um maior impacto no caso do preço de exercício ser grande. Deste modo, o limite superior é uma melhor aproximação para opções mais *in-the-money*. Também é possível observar que para maturidades grandes o erro é substancialmente maior.

Em suma, os resultados mais precisos são a aproximação com base na média aritmética e o limite inferior, descritos nos capítulos 3 e 4, respetivamente.

Bibliografia

- [1] L. Arnold. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. Krieger Publishing Company, Malabar, 1992.
- [2] Fischer Black. The pricing of commodity contracts. *Journal of financial economics*, 3(1):167–179, 1976.
- [3] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, 81:637–654, 1973.
- [4] Michael Curran. Valuing asian and portfolio options by conditioning on the geometric mean price. *Management science*, 40(12):1705–1711, 1994.
- [5] John C. Hull. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education India, 2006.
- [6] A. G.Z. Kemna and A.C.F. Vorst. A pricing method for options based on average asset values. *Journal of Banking and Finance*, 14(1):113–129, 1990.
- [7] J. Aase Nielsen and Klaus Sandmann. Pricing bounds on asian options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 38(02):449–473, 2003.
- [8] L. C. G. Rogers and Z. Shi. The value of an asian option. *Journal of Applied Probability*, 32:1077–1088, 1995.
- [9] Stuart M. Turnbull and Lee Macdonald Wakeman. A quick algorithm for pricing european average options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(3):377–389, 1991.
- [10] P. Zhang. *Exotic Options: A Guide to Second Generation Options*. World Scientific, Singapore, 2 edition, 1998.